Devoir maison n$^{\text{o}}$ 6

À rendre le lundi 18 décembre

Exercice 1 (d'après CCINP 2018)**.**
Étant donné un réel non nul μ, on considère l'équation différentielle (E_μ) suivante :

$$16(x^2 - x)y'' + (16x - 8)y' - \mu y = 0.$$

Soit y une fonction égale à la somme d'une série entière de terme général $a_n x^n$, de rayon de convergence R supposé strictement positif :

$$\forall x \in \,]-R\,;R[, \quad y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. Justifier que y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un ensemble que vous préciserez puis exprimer $y'(x)$ et $y''(x)$ à l'aide d'une série.
2. Montrer que y vérifie (E_μ) si et seulement si $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left[(16n^2 - \mu)a_n - 8(n+1)(2n+1)a_{n+1}\right]x^n = 0.$

On supposera dorénavant que y est solution de (E_μ).

3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{n+1} = \dfrac{16n^2 - \mu}{4(2n+2)(2n+1)} a_n$.
4. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{a_0}{4^n (2n)!} \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (16k^2 - \mu)$.
5. Si $a_0 = 0$, donner une expression simple de y et préciser son domaine de validité.
6. Si $a_0 \neq 0$ et $\mu \neq 16p^2$ pour tout entier p, calculer le rayon de convergence de y.
7. ★ Si $a_0 \neq 0$ et $\mu = 16p^2$ avec p un entier, montrer que y est polynomiale et préciser son degré.